Stage Animath
18/09/2017

Eléments de correction des exercices de l'après-midi

1. Archimède trace un carré dans le sable et vous demande si vous sauriez construire facilement un carré dont l'aire est deux fois celle de celui qu'il a déjà tracé.

Construire le carré de côté la diagonale du précédent

2. Vous avez devant vous 9 lingots, mais seulement l'un d'eux est un vrai lingot d'or, les autres sont des imitations en fer et sont moins lourds que le vrai. Vous pouvez choisir lequel vous emportez, en vous aidant pour cela d'une balance à 2 plateaux. Seulement vous n'avez le droit d'utiliser la balance que 2 fois ! Comment choisir le bon lingot ?

L'astuce est de se rappeler que la balance peut nous donner 3 résultats possibles : gauche, droite, ou égalité. Il faut faire 3 groupes de 3 et en mettre 2 sur la balance, dans tous les cas il nous restera un groupe de 3 à tester. On refait alors la meme chose : 2 lingots sur la balance, et ça nous donnera lequel est le vrai.
Lien avec les algorithmes de Diviser et régner (on peut généraliser pour d'autres nombres de lingots au départ)
En bonus : preuve qu'à 13 c'est impossible : à chaque pesée il y a 3 résultats, donc le nombre de cas que l'on peut séparer à 2 pesées est 3×3 = 9. De même, avec n pesées, on sépare au maximum 3n cas.

3. J'ai un tas de 10 billes, que je peux répartir dans deux poches. Combien ai-je de manières possibles pour ces répartitions ?

Il faut préciser l'énoncé car on peut avoir des réponses différentes selon si on considère les billes et les poches comme distinctes ou non)
Billes distinctes et poches distinctes : 2^10 = 2048
Deux choix pour chaque bille (introduit le double-comptage pour la suite)
Billes distinctes mais poches identiques : 2^9 = 1024
Deux fois moins que le cas précédent car deux configurations où les poches A et B ont été échangées ne donnent qu'une configuration si on ne distingue pas A de B
Billes identiques et poches distinctes : 11
On ne s'intéresse plus qu'à la quantité de billes dans chaque poche, ce nombre peut varier entre 0 et 11 dans la poche A, et le nombre de billes dans la poche B est alors uniquement déterminé.
Billes identiques et poches identiques : 6
Les répartitions possibles si les poches sont identiques sont 0-10, 1-9, 2-8, 3-7, 4-6 et 5-5 (c'est presque deux fois moins que le résultat précédent car on peut échanger les poches, sauf dans la répartition 5-5)

Question bonus : On a un échiquier de taille 8x8 dont on enlève deux coins opposés. Peut on le paver avec des dominos de taille 2x1 ?

L'idée (très astucieuse) consiste à colorier l'échiquier en noir et blanc (une case sur deux). On se rend compte que deux coins opposés sont coloriés de la même couleur. L'échiquier tronqué contient donc un nombre inégal de cases blanches et de cases noires. Or un *domino recouvre forcément une case noire et une case blanche.On ne pourra donc pas réaliser le pavage souhaité.*